L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;1[$ par :

$$f(x) = 30\ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1[$.

Solution : $f = 30\ln(u)$ avec u définie, continue, dérivable et strictement positive sur $]0\,;\,1[$. f est donc dérivable sur $]0\,;\,1[$.

$f = 30\ln(u) \Longrightarrow f' = 30 \times \dfrac{u'}{u}$

$u = \dfrac{v}{w} \Longrightarrow u' = \dfrac{v'w - vw'}{w^2}$ avec $\begin{cases} v(x) = 20x \\ w(x) = 1-x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'(x) = 20 \\ w'(x) = -1 \end{cases}$ alors $u'(x) = \dfrac{20(1-x)+20x}{(1-x)^2} = \dfrac{20}{(1-x)^2}$

$\forall x \in]0\,;\,1[\,,\ f'(x) = 30 \times \dfrac{20}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{20x} = \dfrac{30}{x(1-x)} > 0$

f est donc strictement croissante sur $]0\,;\,1[$

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Solution : Deux méthodes :

Par résolution d'inéquations

On cherche x tel que $20 \leqslant f(x) \leqslant 120$.

- $f(x) \geqslant 20 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) \geqslant \dfrac{2}{3} \Longleftrightarrow \dfrac{20x}{1-x} > \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow x\left(20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\right) \geqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}$

  On pose $\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}{20+\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}}$; $\alpha \approx 0{,}09 \in [0\,;1]$.

- $f(x) \leqslant 120 \Longleftrightarrow \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right) \leqslant 4 \Longleftrightarrow \dfrac{20x}{1-x} \leqslant \mathrm{e}^4 \Longleftrightarrow x\left(20+\mathrm{e}^4\right) \leqslant \mathrm{e}^4 \Longleftrightarrow x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4}$

  On pose $\beta = \dfrac{\mathrm{e}^4}{20+\mathrm{e}^4}$; $\beta \approx 0{,}73 \in [0\,;1]$.

$f(x) \in [20\,;\,120] \Longleftrightarrow x \in [\alpha\,;\,\beta]$

Par balayage

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{20x}{1-x} = 0^+$ par quotient donc en posant $X = \dfrac{20x}{1-x}$ on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \ln(X) = -\infty$

de même, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{X \to +\infty \\ X < +\infty}} \ln(X)\ \ +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{20x}{1-x} = +\infty$ par quotient

f est continue et strictement croissante sur $]0\,;\,1[$ à valeurs dans $]-\infty\,;\,+\infty[$ or 20 et 120 appartiennent à l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, les équations $f(x) = 20$ et $f(x) = 120$ admettent chacune une solution unique

$\alpha \approx 0{,}09$ et $\beta \approx 0{,}73$

Donc le diamètre d'un tronc est entre 9 et 73 cm

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. **a.** Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.

Solution : Il s'agit de la moyenne annuelle de croissance en mètres entre les âges de 70 et 80 ans : $\dfrac{18{,}05 - 15{,}6}{10} = \dfrac{2{,}45}{10} = 0{,}245$.

b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

Solution : « =(C2-B2) ÷ (C1-B1) »

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

Solution : Il faut d'abord déterminer l'âge de l'épicéa.

$f(0{,}27) = 30\ln\left(\dfrac{5{,}4}{0{,}73}\right) \approx 60$

Un épicéa de 60 ans devrait mesurer 13,40 m si on considère qu'entre 50 et 70 ans la croissance annuelle moyenne est de 0,22 m.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

Solution : On complète le tableau donné dans le texte en supprimant les colonnes du début :

	…	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	…	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	…	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	…	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,167 5

On trouve en E3, F3 et G3 0,25 , puis 0,24 en H3, les valeurs suivantes étant elles aussi inférieures à 0,25. qui est la plus grande valeur.

Donc la vitesse de croissance moyenne annuelle est maximale entre 80 ans et 95 ans. Ceci nous donne donc l'intervalle d'âges sur lequel la qualité du bois est la meilleure.

b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Solution : L'âge d'un épicéa de diamètre 70 cm est $f(0,7) = 30\ln\left(\dfrac{14}{0,3}\right) \approx 115$ ans

Il n'est donc pas cohérent de demander aux bûcherons de couper des épicéa de diamètre 70 cm puisque la qualité du bois n'est plus la meilleure.